

PII: S0017-9310(97)00100-2

# Calcul des flux aux parois présentant des singularités

H. SADAT et P. SALAGNAC

Laboratoire d'Etudes thermiques, URA CNRS 1403, 40, Avenue du Recteur Pineau, 86022 Poitiers, France

(Reçu 12 février 1996 et sous forme finale 28 mars 1997)

**Abstract**—Nous présentons une étude du transfert thermique dans des domaines possédant des singularités en flux aux frontières. Après une mise en évidence des deux types de singularités que l'on peut rencontrer, une méthode de calcul des flux aux parois utilisant des volumes de contrôle aux frontières est proposée. Des exemples numériques en conduction et en convection nous permettent d'illustrer l'importance des erreurs commises d'une part et les gains en précision que la méthode proposée permet d'obtenir d'autre part. Nous terminons par une discussion sur la zone d'influence de la singularité qui conditionne le choix de la taille des volumes de contrôle. © 1997 Elsevier Science Ltd.

## 1. INTRODUCTION

Dans de nombreux problèmes de thermique définis dans de géométries complexes, des singularités en flux apparaissent naturellement en certains points de la frontière. La jonction entre une paroi adiabatique et une paroi isotherme faisant entre elles un angle supérieur à  $\pi/2$  en est un exemple typique. Le calcul des flux pariétaux peut dans ce cas être entaché d'une erreur systématique parfois importante. Ce problème bien connu en mécanique de fractures [1] n'a reçu qu'assez peu d'attention en thermique. Il est généralement traité à l'aide d'une technique de raffinement de maillage parfois complétée par une extrapolation de Richardson [2, 3]. La combinaison d'une étude asymptotique au voisinage du point singulier et d'une étude numérique loin de celui-ci peut également être utilisée [4, 5]. Signalons aussi, l'utilisation d'éléments finis avec des bases d'interpolation singulières [6–8]. Une autre approche consiste à utiliser une transformation conforme dans la région voisine du point singulier [9].

Quand les singularités sont multiples, on conçoit que ces méthodes par ailleurs lourdes à mettre en oeuvre, nécessitent des temps de calcul et un espace mémoire importants. D'autre part, leur intégration à des codes de calcul aux éléments finis est pour le moins problématique.

On propose ici une technique basée sur le concept des volumes de contrôle qui permet, sous certaines conditions, de contourner la difficulté posée par la présence de singularités.

En plus des singularités dues à des conditions aux limites mixtes (qui sont les plus connues), nous traiterons également les singularités en parois isothermes. Après une mise en évidence des deux types de singularités, nous illustrons sur des exemples numériques l'importance des erreurs qu'elles induisent et les gains

en précision que la méthode proposée permet d'obtenir. Nous terminons par une discussion sur les zones d'influence des singularités et sur le choix de la taille des volumes de contrôle.

## 2. MISE EN ÉVIDENCE DES SINGULARITÉS

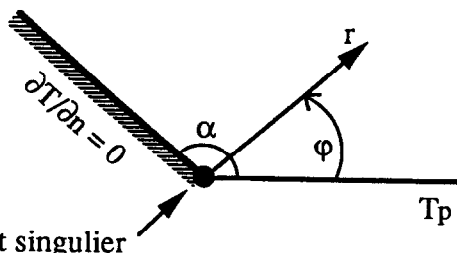
Dans ce paragraphe, l'apparition de la singularité est mise en évidence sur l'exemple de la conduction de la chaleur en régime stationnaire. Bien évidemment, le problème est le même en convection puisqu'au voisinage des parois, le transfert de chaleur se fait par conduction.

Considérons le coin de la Fig. 1 limité par les faces  $\varphi = 0$  et  $\varphi = \alpha$  correspondant respectivement à une paroi à température constante  $T_p$  et à une paroi adiabatique. La démonstration qui suit, s'effectue à partir d'une température  $T_p$  nulle, mais peut facilement s'étendre à une température  $T_p$  quelconque par un changement de variable  $T^* = T - T_p$ .

L'équation de la chaleur en coordonnées polaires  $(r, \varphi)$  s'écrit :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (1)$$

avec les conditions aux limites suivantes



Point singulier

Fig. 1. Singularité en flux due à des conditions aux limites mixtes.

NOMENCLATURE

$A_n, B_n$	coefficients dans les équations (4) et (9)	Symboles grecs	
$d$	longueur	$\alpha$	angle de la cavité
$g$	accélération de la pesanteur	$\beta$	coefficient d'expansion volumique
$L, l$	longueur	$\delta$	diffusivité thermique
$n$	normale à la frontière	$\Delta T$	différence de température entre les parois chaudes et froides ( $= T_c - T_f$ )
$o$	origine du repère cartésien	$\Gamma$	frontière
$P$	noeud	$\varepsilon$	erreur
$r$	coordonnée polaire	$\varphi$	coordonnée polaire
$Ra$	nombre de Rayleigh ( $= g\beta\Delta TL^3/\nu\delta$ )	$\Phi$	flux
$S$	terme source	$\lambda$	conductivité thermique
$T$	température	$\nu$	viscosité cinématique
$x, y, z$	coordonnées cartésiennes.	$\omega_n$	valeurs propres.

$$T(r, 0) = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial T(r, \varphi)}{\partial \varphi} = 0. \tag{3}$$

La méthode de séparation des variables conduit à la solution :

$$T(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^{\omega_n} \sin(\omega_n \varphi) \tag{4}$$

avec

$$\omega_n = (2n + 1) \frac{\pi}{2\alpha}. \tag{5}$$

Au voisinage du coin ( $r \rightarrow 0$ ), nous avons alors :

$$T(r, \varphi) \sim A_0 r^{\pi/2\alpha} \sin\left(\frac{\pi}{2\alpha} \varphi\right). \tag{6}$$

Les flux de chaleur s'en déduisent facilement :

$$q_r(r, \varphi) = -A_0 \left(\frac{\pi\lambda}{2\alpha}\right) r^{(\pi/2\alpha)-1} \sin\left(\frac{\pi}{2\alpha} \varphi\right) \tag{7}$$

$$q_\varphi(r, \varphi) = -A_0 \left(\frac{\pi\lambda}{2\alpha}\right) r^{(\pi/2\alpha)-1} \cos\left(\frac{\pi}{2\alpha} \varphi\right). \tag{8}$$

Ces deux dernières relations montrent clairement que les flux sont infinis pour  $\alpha > \pi/2$ .

Une démonstration similaire peut être faite dans le cas d'un coin isotherme de température  $T_p$  (Fig. 2). La température s'écrit ici :

$$T(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{\omega_n} \sin(\omega_n \varphi) \tag{9}$$

avec

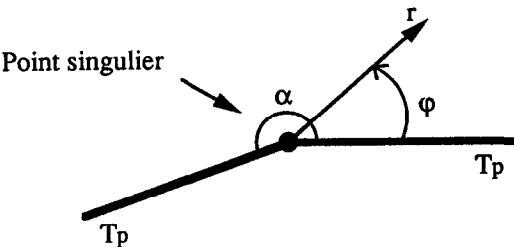


Fig. 2. Singularité en flux sur des parois isothermes.

$$\omega_n = n \frac{\pi}{\alpha}. \tag{10}$$

La température et les flux de chaleur au voisinage du coin ( $r \rightarrow 0$ ) s'écrivent ici :

$$T(r, \varphi) \sim B_1 r^{\pi/\alpha} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha} \varphi\right) \tag{11}$$

$$q_r(r, \varphi) = -B_1 \left(\frac{\pi\lambda}{\alpha}\right) r^{(\pi/\alpha)-1} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha} \varphi\right) \tag{12}$$

$$q_\varphi(r, \varphi) = -B_1 \left(\frac{\pi\lambda}{\alpha}\right) r^{(\pi/\alpha)-1} \cos\left(\frac{\pi}{\alpha} \varphi\right). \tag{13}$$

On peut ainsi voir que dans ce cas les flux sont infinis pour  $\alpha > \pi$ .

3. IMPORTANCE DES SINGULARITÉS

Afin d'illustrer l'importance des erreurs induites par la présence de singularités sur le calcul des flux pariétaux, considérons le problème de la conduction de la chaleur dans le domaine parallélogramme de la

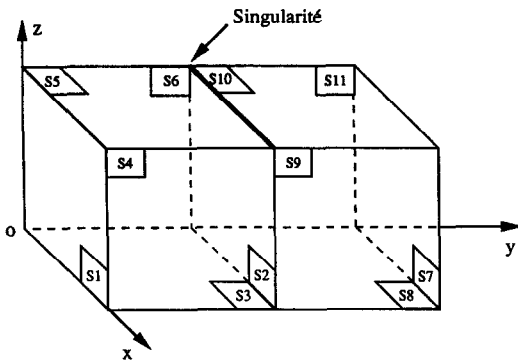


Fig. 3. Domaine tridimensionnel possédant une ligne singulière.

Fig. 3. Les surfaces carrées S1 à S11 ont des arêtes de longueur  $L = 1$ . Le domaine est limité par quatre surfaces rectangulaires (S4+S9), (S3+S8), (S6+S11), (S5+S10) et par deux surfaces carrées S1 et S7. La surface S2 qui apparaît sur la figure est une surface fictive qui est utilisée pour faciliter la visualisation du domaine d'étude et qui sert à la construction du maillage (elle ne représente par une frontière du domaine). La paroi (S3+S8) est portée à une température constante  $T_c$  tandis que sur la paroi opposée, la surface S5 est maintenue à une température constante  $T_r$  ( $T_r < T_c$ ). Toutes les autres surfaces (S1, S4, S6, S7, S9, S10, S11) sont supposées être adiabatiques. On constate donc sur la paroi (S5+S10), la juxtaposition d'une condition de Dirichlet (sur S5) et d'une condition de Neumann homogène (sur S10) avec un angle égal à  $\pi$ , conduisant ainsi à l'apparition d'une singularité sur l'arête commune aux deux surfaces.

Un code de calcul aux éléments finis a été utilisé pour le calcul du champ de température et des flux entrant et sortant dans le Volume. Les flux adimensionnels obtenus sur les parois actives avec un maillage en 2000 éléments hexaédriques sont respectivement de 1.43308 et  $-1.2303$ , soit une erreur relative de 14.15%. La définition de l'erreur relative (qui sera utilisée tout au long de cette étude) est donnée par :

$$\varepsilon(\%) = 100 * \left| \frac{\Phi^{ns} - \Phi^s}{\Phi^{ns}} \right|$$

où  $\Phi^{ns}$  et  $\Phi^s$  représentent respectivement le flux entrant (ou sortant) sur la paroi ne présentant pas de singularités et le flux sortant (ou entrant) sur la paroi présentant une singularité.

Nous avons ensuite effectué le calcul en considérant le domaine bidimensionnel composé des surfaces S4 et S9 et en gardant les mêmes conditions aux limites (donc la singularité). Pour un maillage en 200 éléments quadrilatéraux, nous avons obtenus des flux de 1.42362 et de  $-1.2797$ , soit une erreur relative de 10.11%. Le calcul effectué en imposant la même condition de Dirichlet sur S5 et sur S10 (donc en absence de singularité) a conduit en revanche à une erreur tout

à fait négligeable dans les deux cas bidimensionnel et tridimensionnel. Des erreurs aussi importantes sur le calcul des flux pariétaux (grandeurs qui intéressent beaucoup le thermicien) sont bien sûr inacceptables.

#### 4. CALCUL DES FLUX PAR LA MÉTHODE DES VOLUMES DE CONTRÔLE

Pour contourner la difficulté liée à la présence de singularités en flux, nous avons donc choisi de calculer les flux sur les noeuds aux frontières en considérant les volumes de contrôle centrés sur ces noeuds et en y effectuant des bilans d'énergie. Les volumes de contrôle sont construits sur la trame du maillage en éléments finis. Cette construction peut se faire de diverses façons et pour tous les types d'éléments finis géométriques utilisés. Dans le cas d'un maillage en éléments finis triangulaires par exemple, la méthode la plus simple consiste à relier les centres de gravité des triangles aux milieux des arêtes.

Considérons maintenant le volume de contrôle centré sur le noeud frontière  $P$ , représenté sur la Fig. 4. Le flux sortant  $\Phi_{\text{sortant}}$  à la frontière est égal à la somme du flux entrant  $\Phi_{\text{entrant}}$  dans le volume et du terme source  $S$  éventuellement :

$$\Phi_{\text{sortant}} = \Phi_{\text{entrant}} + S. \quad (14)$$

Le flux pariétal n'est ainsi plus calculé directement en paroi où est localisée la singularité, mais à l'intérieur du domaine. Le flux entrant dans la partie  $\Gamma_e$  de la frontière du volume de contrôle appartenant au triangle  $e$  s'écrit dans le cas général :

$$\Phi_e = \int_{\Gamma_e} (\lambda \vec{\nabla} T - V \cdot T) \cdot n \, d\Gamma \quad (15)$$

où  $\lambda$  est la conductivité thermique du milieu considéré,  $V$  sa vitesse (dans les cas convectifs) et  $n$  la normale sortante à  $\Gamma_e$ . L'intégrale ci-dessus est calculée en utilisant l'interpolation correspondant à l'élément fini géométrique choisi. Finalement  $\Phi_{\text{entrant}}$  est déterminé par sommation sur tous les triangles ayant pour sommet commun le noeud frontière  $P$  :

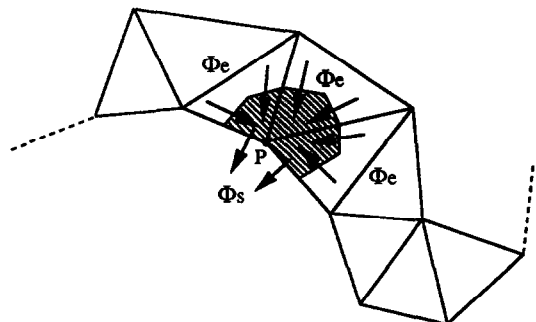


Fig. 4. Bilan thermique sur un volume de contrôle en frontière.

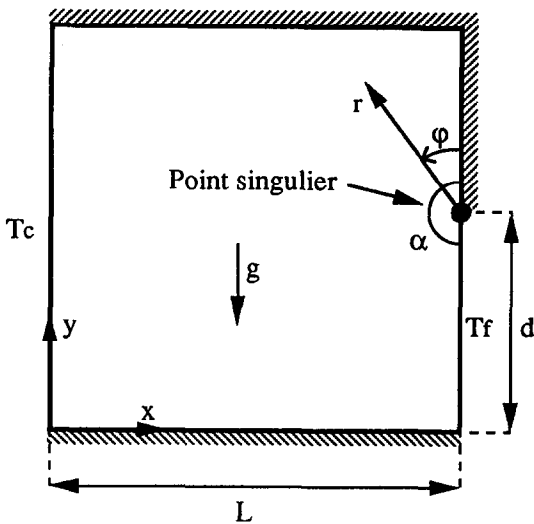


Fig. 5. Cavité différentiellement chauffée possédant un point singulier.

$$\Phi_{entrant} = \sum_e (\Phi_e). \tag{16}$$

Les détails de ces calculs peuvent être trouvés par ailleurs [10]. Il est important de remarquer ici que les champs peuvent être calculés par n'importe quelle méthode numérique (différences finies, éléments finis, ...) et les flux calculés par cette technique de bilans. D'autre part, cette façon de procéder n'induit pas d'augmentation notable des temps de calcul.

L'intérêt de cette méthode de calcul des flux est illustré dans les paragraphes qui suivent à travers des problèmes de conduction et de convection naturelle définis dans des géométries bidimensionnelles. Nous désignerons dans ce qui suit, cette méthode de bilans par l'abréviation MB.

5. SINGULARITÉS DUES À DES CONDITIONS AUX LIMITES MIXTES

Considérons la cavité carrée représentée sur la Fig. 5. La paroi verticale de gauche est à la température constante  $T_c$ . La frontière verticale de droite est divisée en deux segments de longueur identique  $d$ . La partie inférieure de cette paroi est à une température constante  $T_f$  plus basse que  $T_c$  tandis que les parois hori-

zontales et la partie supérieure de la paroi verticale de droite sont adiabatiques. Le point de coordonnées  $(L, d)$  correspond donc à un point singulier avec un angle de  $180^\circ$ .

5.1. Régime conductif stationnaire

Le Tableau 1 compare les résultats numériques en flux obtenus par une méthode de différences finies (MDF) en intégrant le vecteur flux sur une frontière par la méthode de Simpson, une méthode aux éléments finis triangulaires (MEF) du type Galerkin et par la méthode de bilans (MB) décrite précédemment en régime conductif stationnaire.

On observe que le flux entrant dans la paroi verticale de gauche est bien calculé par les trois méthodes. En ce qui concerne la paroi verticale de droite (qui contient le point singulier), on constate en revanche que le calcul du flux sortant par la méthode des différences finies et par la méthode des éléments finis induit une erreur permanente quelle que soit la finesse du maillage. L'utilisation d'une extrapolation de Richardson n'améliore guère les résultats comme le montre la dernière ligne du tableau.

D'un autre côté, la méthode de calcul des flux proposée conduit à des flux sortants d'une précision remarquable. L'erreur relative est ici inférieure à 0.004% pour un maillage lâche de  $(5*5)$ . Précisons ici que les flux locaux calculés par les trois méthodes ne diffèrent qu'au voisinage immédiat du point singulier. Remarquons enfin que l'erreur relative de la méthode des bilans augmente légèrement lorsqu'on affine le maillage. Ceci peut paraître contradictoire avec le principe de convergence spatiale des méthodes numériques. Nous verrons plus loin que ce problème est en fait lié à la zone d'influence des singularités.

5.2. Régime convectif stationnaire

Nous avons ensuite considéré le problème de la convection naturelle laminaire dans la configuration de la Fig. 5. Nous avons utilisé pour cela une méthode aux éléments finis basée sur le concept des volumes de contrôle (MVCEF) [10, 11] pour la résolution numérique. Le calcul des flux a été effectué comme précédemment.

Nous avons comparé nos résultats aux solutions données par le code FIDAP [12] qui utilise une formulation en éléments finis. Nous avons calculé les

Tableau 1. Comparaison entre les valeurs des flux obtenues par différentes méthodes en régime conductif

Maillages	MEF			MDF (Simpson)			MB		
	$\Phi_{entrant}$	$\Phi_{sortant}$	$\varepsilon$ (%)	$\Phi_{entrant}$	$\Phi_{sortant}$	$\varepsilon$ (%)	$\Phi_{entrant}$	$\Phi_{sortant}$	$\varepsilon$ (%)
5*5	0.88908	-0.54980	38.16	0.87709	-0.60402	31.13	0.87705	-0.87702	$3.42 \times 10^{-3}$
11*11	0.84761	-0.64555	23.84	0.84308	-0.67767	19.62	0.84308	-0.84310	$2.37 \times 10^{-3}$
21*21	0.83372	-0.69740	16.35	0.83128	-0.71657	13.80	0.83138	-0.83144	$7.22 \times 10^{-3}$
31*31	0.82905	-0.72035	13.11	0.82764	-0.73430	11.28	0.82769	-0.82752	$2.05 \times 10^{-2}$
41*41	0.82671	-0.73400	11.21	0.82529	-0.74509	9.72	0.82540	-0.82556	$1.94 \times 10^{-2}$
51*51	0.82530	-0.74330	9.94	0.82458	-0.75254	8.74	0.82445	-0.82437	$9.70 \times 10^{-3}$
Extrapolation	0.82437	-0.74620	9.48	0.82329	-0.75460	8.34	0.82341	-0.82360	$2.35 \times 10^{-2}$

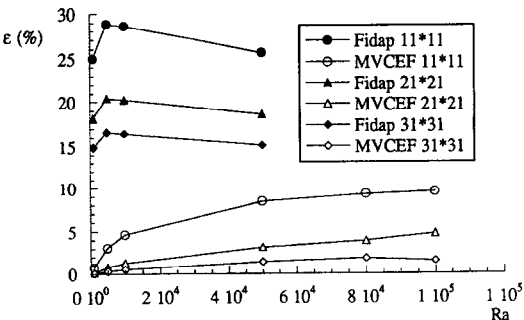


Fig. 6. Erreur relative sur les flux en fonction du nombre de Rayleigh pour différents maillages.

nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh pour différents maillages et pour un nombre de Prandtl de 0.72. La différence essentielle apparaît bien sûr au niveau des flux traversant la paroi froide où se trouve la singularité. Nous avons reporté sur la Fig. 6, les erreurs relatives (entre les nombres de Nusselt sur les deux parois actives) obtenues pour différents maillages. Ces résultats donnent d'une part, la mesure des erreurs commises et d'autre part, le gain en précision que permet la méthode de calcul des flux par bilans. Il est intéressant de souligner ici qu'en ce qui concerne les champs calculés, les deux méthodes donnent des résultats sensiblement identiques.

6. SINGULARITÉS SUR DES PAROIS ISOTHERMES

Afin de montrer la vigueur de ce type de singularités, nous avons considéré le problème de la conduction stationnaire dans le domaine de la Fig. 7. La frontière AFE est isotherme et maintenue à 1°C tandis que les deux côtés BC et CD du dièdre sont maintenus à 0°C. Le sommet du dièdre est ici le point singulier. L'étude est effectuée pour des valeurs de  $\alpha$  comprises entre 180° et 314.76°, la valeur  $\alpha = 180^\circ$  correspondant au cas limite non singulier du rectangle.

Le champ de température a d'abord été déterminé par une méthode aux éléments finis du type Galerkin. Les flux globaux traversant les frontières AFE et BCD ont ensuite été calculés par la méthode des éléments

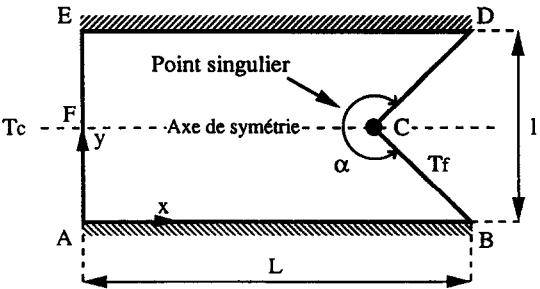


Fig. 7. Cavité différentiellement chauffée possédant un point singulier sur une paroi isotherme.

finis et par la méthode des volumes de contrôle construits aux frontières. Nous avons regroupé les résultats obtenus avec différents maillages en éléments triangulaires dans le Tableau 2. Ces résultats montrent que la méthode de calcul des flux par éléments finis induit des erreurs importantes qui augmentent avec l'ordre de la singularité. On constate d'autre part que la technique de calcul des flux par bilans sur des volumes de contrôle permet d'obtenir des résultats très précis.

On remarque que la méthode proposée donne une erreur nulle pour un maillage en 800 éléments et pour les deux angles de 223.6° et 280.38°. Ceci est dû aux propriétés de conservation locale de la méthode. On constate aussi que cette erreur augmente (quoique restant encore assez faible) au fur et à mesure qu'on affine le maillage. Ceci est dû à l'extension de la zone d'influence de la singularité comme on le verra plus bas.

Pour la configuration correspondant à l'angle de 314.76°, on constate que l'erreur n'est plus nulle pour le maillage de 800 éléments. Dans ce cas, la singularité est plus importante et la frontière du volume de contrôle est alors en partie située dans la zone d'influence.

7. ZONE D'INFLUENCE DES SINGULARITÉS

Il est bien évident que la présence de singularités influe également sur le champ de température au voisinage immédiat des points singuliers. On conçoit alors qu'au delà d'une certaine finesse du maillage, le calcul

Tableau 2. Comparaison entre les valeurs des flux obtenues par la méthode des bilans et la MEF dans le cas du régime convectif

Angle $\alpha$	Maillage		$\Phi\Gamma_{AFE}$	MEF $\Phi\Gamma_{BCD}$	$\varepsilon$ (%)	$\Phi\Gamma_{AFE}$	MB $\Phi\Gamma_{BCD}$	$\varepsilon$ (%)
	Eléments	Noeuds						
180	800	441	0.50000	-0.50000	0.00	0.50000	-0.50000	0.00
223.6	800	441	0.53284	-0.55664	4.47	0.53286	-0.53286	0.00
	1600	861	0.53270	-0.54885	3.03	0.53276	-0.53270	$1.12 \times 10^{-2}$
	3600	1891	0.53245	-0.54526	2.41	0.53256	-0.53234	$4.13 \times 10^{-2}$
280.38	800	441	0.65454	-0.73979	13.02	0.65456	-0.65456	0.00
	1600	861	0.65162	-0.71850	10.26	0.65167	-0.65160	$1.07 \times 10^{-2}$
	3600	1891	0.64870	-0.70056	7.99	0.64889	-0.64855	$5.23 \times 10^{-2}$
314.76	800	441	1.08819	-1.27058	16.76	1.08976	-1.08972	$3.67 \times 10^{-3}$
	1600	861	1.06076	-1.20928	14.00	1.06140	-1.06132	$7.54 \times 10^{-3}$
	3600	1891	1.04368	-1.16010	11.15	1.04417	-1.04379	$3.64 \times 10^{-2}$

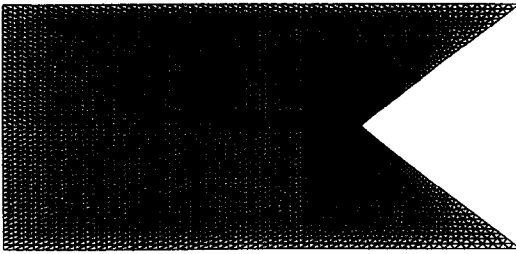


Fig. 8. Maillage fin près de la singularité.

du flux entrant dans le volume de contrôle est erroné par le fait même que les températures sont mal calculées. On en déduit que les frontières des volumes de contrôle doivent être situées en dehors de la zone d'influence de la singularité que nous définissons ci-dessous.

Considérons le maillage fin de la Fig. 8. Au voisinage du point singulier, la solution est donnée par l'équation (11) où le coefficient  $B_1$  est bien sûr inconnu. Les températures en deux points situés aux positions radiales  $r$  et  $r + \Delta r$  (pour une position angulaire  $\varphi$  donnée) doivent donc satisfaire la relation :

$$\frac{T(r + \Delta r)}{T(r)} = \left[ \frac{r + \Delta r}{r} \right]^{\pi/\alpha} \quad (17)$$

où  $\pi/\alpha = 0.64$  dans le cas considéré ici.

De même, dans le cas de la singularité de la Fig. 5, on a la relation :

$$\frac{T(r + \Delta r)}{T(r)} = \left[ \frac{r + \Delta r}{r} \right]^{\pi/2\alpha} \quad (18)$$

avec  $\pi/(2\alpha) = 0.5$ .

Les relations (15) et (16) nous permettent de représenter sur les Figs 9 et 10, les erreurs relatives  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  entre le rapport théorique et le rapport calculé numériquement pour les deux types de singularités :

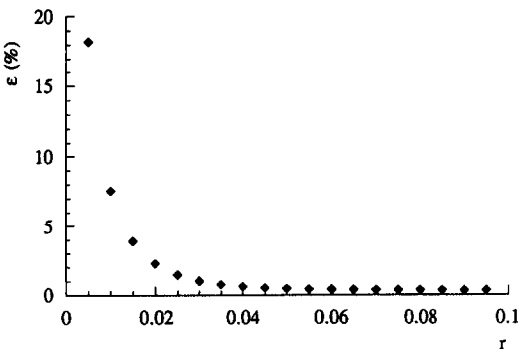


Fig. 9. Erreur relative sur le comportement asymptotique.

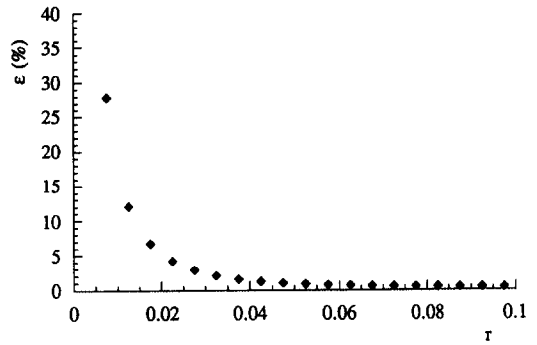


Fig. 10. Erreur relative sur le comportement asymptotique.

$$\varepsilon_1 = \frac{\left| \left[ \frac{T(r + \Delta r)}{T(r)} \right]_{\text{calculé}} - \left[ \frac{r + \Delta r}{r} \right]^{\pi/\alpha} \right|}{\left[ \frac{r + \Delta r}{r} \right]^{\pi/\alpha}} \quad (19)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\left| \left[ \frac{T(r + \Delta r)}{T(r)} \right]_{\text{calculé}} - \left[ \frac{r + \Delta r}{r} \right]^{\pi/2\alpha} \right|}{\left[ \frac{r + \Delta r}{r} \right]^{\pi/2\alpha}} \quad (20)$$

Pour la singularité en paroi isotherme (Fig. 7), on observe que cette erreur est inférieure à 1% dans une région comprise entre  $r = 0.04$  et  $r = 0.1$ . Ceci signifie que la température est calculée de façon précise dans cette région. Au fur et à mesure que  $r$  tend vers zéro, l'erreur augmente rapidement pour atteindre 18% à  $r = 5 \times 10^{-3}$ . Ces résultats montrent donc que le volume de contrôle doit être assez large pour que sa frontière soit située dans la région de la Fig. 9 où l'erreur  $\varepsilon$  est faible.

Les mêmes remarques peuvent être faites pour le deuxième type de singularité (Fig. 10). Nous ferons simplement remarquer que cette singularité perturbe beaucoup plus le champ de température que la précédente. L'erreur maximum observée est de 27.9% pour le point le plus proche de la singularité.

Remarquons enfin que pour ce type de singularité, la température sur la paroi adiabatique n'est pas une donnée du problème. La température aux noeuds placés sur la paroi adiabatique et se trouvant dans la zone d'influence de cette singularité est donc mal évaluée. Ceci explique les erreurs plus importantes sur le calcul des flux que l'on obtient dans ce cas.

## 8. PROBLÈMES À SINGULARITÉS MULTIPLES

Bien évidemment, dans les problèmes où coexistent plusieurs points singuliers, les erreurs sont plus importantes. Considérons par exemple la cavité rectangulaire de longueur  $L$  et de largeur  $L/2$  repré-

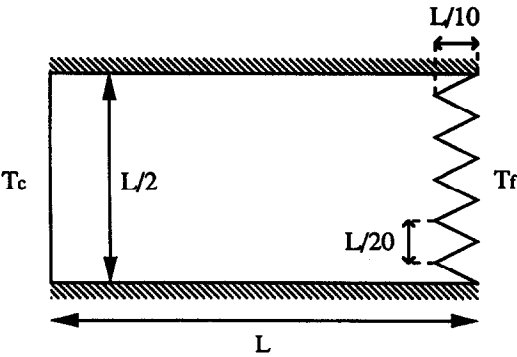


Fig. 11. Exemple d’une configuration possédant des singularités multiples.

sentée sur la Fig. 11. La paroi verticale lisse est à une température constante  $T_c$  alors que la paroi opposée, formée d’ailettes est à une température constante  $T_r$ . Cette dernière frontière possède donc 5 points singuliers. Les frontières horizontales sont supposées adiabatiques. Nous avons utilisé un maillage composé de 619 noeuds et de 1121 éléments avec pour valeurs numériques  $L = 1\text{ m}$ ,  $T_c = 1^\circ\text{C}$ ,  $T_r = 0^\circ\text{C}$  et  $\lambda = 1\text{ W m}^{-1}\text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ . Nous avons reporté dans le Tableau 3 les résultats aux frontières obtenus à l’aide de la méthode des bilans et les résultats obtenus par la méthode des éléments finis dans le cas du régime conductif stationnaire. Il apparaît ainsi que les erreurs commises au niveau de chacun des points singuliers s’additionnent et conduisent à une erreur très importante de 56% dans le cas de la méthode des éléments finis.

En dehors des problèmes où les singularités sont déterminées par la géométrie, il existe des situations où elles sont dues à la modélisation de la géométrie. Ainsi par exemple, pour modéliser un cercle, les mailleurs en éléments finis procèdent par assemblage de segments de droite. Ceci peut alors induire des singularités qui n’existaient pas dans le problème original.

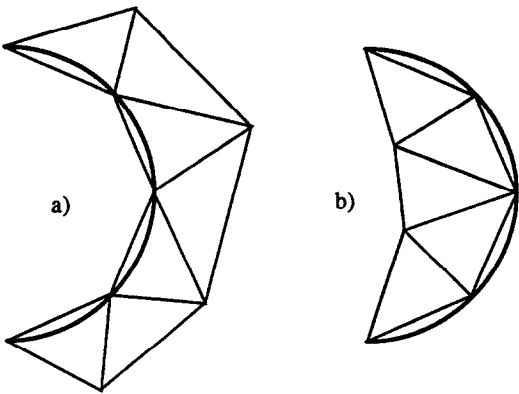


Fig. 12. (a) Frontière convexe ; (b) frontière concave.

Prenons le cas particulier d’un espace annulaire de section circulaire. En maillant ce type de domaine en éléments finis, on s’aperçoit que la frontière intérieure étant convexe [Fig. 12(a)], l’angle  $\alpha$  entre deux segments de droite juxtaposés est strictement supérieur à  $\pi$  (ce qui induit autant de points singuliers que de noeuds frontières). La frontière extérieure quant à elle est concave [Fig. 12(b)]. L’angle  $\alpha$  entre deux segments de droite voisins est ici strictement inférieur à  $\pi$ .

Le Tableau 4 présente les erreurs relatives entre les flux traversant les frontières d’un espace annulaire de section circulaire où la paroi intérieure est à  $T_c = 1^\circ\text{C}$  et la paroi extérieure à  $T_r = 0^\circ\text{C}$ . Les solutions numériques obtenues sont ici comparées à la solution analytique exacte pour un rapport de rayons de 2 et pour une conductivité thermique de  $1\text{ W m}^{-1}\text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ .

Le maillage le plus grossier est composé respectivement de 10 et 20 noeuds sur les cercles intérieur et extérieur. Pour le maillage fin, nous avons doublé ce nombre de noeuds. Les angles  $\alpha$  pour ces deux maillages sont alors de  $216^\circ$  et  $198^\circ$ . On constate que l’erreur ne diminue que très légèrement dans le cas de

Tableau 3. Comparaison entre les valeurs des flux obtenues par la méthode des bilans et la MEF dans le cas d’une singularité multiple

Méthodes	$\Phi_{\text{Paroi chaude}}$	$\Phi_{\text{Paroi froide}}$	Erreur (%)
MEF	0.54795	−0.242449	55.75
MB	0.5479776	−0.54794	$6.86 \times 10^{-3}$

Table 4. Comparaison entre les valeurs des flux obtenues par la méthode des bilans et la MEF dans le cas d’une singularité sur une frontière courbe

Maillages			
Méthodes	Nombre de noeuds	Nombre d’éléments	Erreur relative (%)
MEF	45	60	36.92
MEF	149	238	19.82
MB	45	60	0.00
MB	149	238	0.00

la MEF. En effet, en raffinant le maillage, on augmente la précision sur le calcul du champ de température et on diminue l'angle  $\alpha$  existant entre chaque élément de frontière, mais on augmente aussi le nombre de points singuliers.

## 9. CONCLUSION

Nous avons montré dans ce travail que le calcul des flux aux parois présentant des singularités peut être entaché d'erreurs importantes et doit être effectué avec soin. Nous avons également montré comment l'utilisation d'une méthode de volumes de contrôle aux frontières permet de contourner la difficulté. Cette technique qui peut être facilement implantée sur des logiciels utilisant la méthode aux éléments finis est une alternative intéressante aux techniques existant actuellement.

## REFERENCES

1. Rice, J. R., A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 1968, **35**, 379–385.
2. Peric, M., Natural convection in trapezoidal cavities. *Numerical Heat Transfer*, 1993, **24**(Part A), 213–219.
3. Chao, P. K.-B., Ozoe, H., Churchill, S. W. and Lior, N., Laminar natural convection in an inclined rectangular box with the lower surface half heated and half-insulated. *Transactions of the ASME. Journal of Heat Transfer*, 1983, **105**, 425–432.
4. Bassani, J. L., Nansteel, M. W. and November, M., Adiabatic-isothermal mixed boundary conditions in heat transfer. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1987, **30**(5), 903–909.
5. November, M. and Nansteel, M. W., Natural convection in rectangular enclosures heated from below and cooled along one side. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1987, **30**(11), 2433–2440.
6. Dutta, B. K., Maiti, S. K. and Kakodkar, A., On the use of one point and two points singularity elements in the analysis of kinked cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1990, **29**, 1487–1499.
7. Maiti, S. K., A finite element for variable order singularities based on the displacement formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1992, **33**, 1955–1974.
8. Maiti, S. K., A multicorner variable order singularity triangle to model neighbouring singularities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1992, **35**, 391–408.
9. Lucas, T. R. and Oh, H. S., The method of auxiliary mapping for the finite element solutions of elliptic problems containing singularities. *Journal of Computational Physics*, 1993, **108**, 327–342.
10. Salagnac, P., Application d'une méthode d'éléments finis basée sur le concept des volumes de contrôle à la résolution de problèmes de mécanique des fluides et thermique présentant notamment des singularités aux frontières. Thèse de doctorat de l'Université de Poitiers, France, 1995.
11. Sadat, H. and Salagnac, P., Further results for laminar natural convection in a two-dimensional trapezoidal enclosure. *Numerical Heat Transfer*, 1995, **27**(Part A), 451–459.
12. *FIDAP Users Manual*. Fluid Dynamique International, April 1991.

## CALCULATION OF FLUXES ON SURFACES PRESENTING SINGULARITIES

**Abstract**—This paper deals with the calculation of heat fluxes at singular boundaries. We show that accurate evaluation of these fluxes can be made by using a heat balance on boundary control volumes. Numerical examples in heat diffusion and natural convection problems are considered to assess the correctness of the proposed method. Finally, the region of influence of the singularity is discussed.